

**Eesti LXVII matemaatikaolümpiaad**  
**TALLINNA KOOLIVOOR**  
**9.jaanuaril 2020.a. Tallinnas**  
**IX klass**

Lahendamiseks on aega 3 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. On antu viis reaalarvu  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  ja  $e$ . Nende viie arvu aritmeetiline keskmine on 2, korrutis on 1 ning  $\frac{1}{abcd} + \frac{1}{bcde} + \frac{1}{cdea} + \frac{1}{deab} = 8$ . Leia korrutis  $eabc$ .

2. Täisarvude  $a$ ,  $b$  ja  $c$  korral on teada, et nende summa  $a+b+c$  jagub arvuga 3. Näita, et summa  $a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$  jagub arvudega 2 ja 3.

3. Viisnurga  $ABCDE$  kõikide külgede pikkused on võrdsed ning tippude  $C$  ja  $D$  juures on täisnurgad. Olgu punkt  $P$  diagonaalide  $AC$  ja  $BD$  lõikepunkt. Näita, et lõigud  $PA$  ja  $PD$  on võrdsete pikkustega.

4. On antud kaks sellist võrdhaarset kolmnurka, et ühe aluse pikkus on teise haara pikkuseks ja teise aluse pikkus on esimese haara pikkuseks. Kas on võimalik, et neist ühe kolmnurga ümbermõõt on teise kolmnurga ümbermõõdust 25% võrra suurem?

5. Tahvlile on kirjutatud arv 2020. Iga käigukorra ajal tuleb tahvlil olevast arvust lahutada selle arvu üks positiivsetest jagajatest, tahvlil olev arv kustutada ning tahvlile kirjutada saadud vahe. Kaotab see, kes kirjutab tahvlile arvu 0.

Kati ja Mati käivad kordamööda ja seejuures esimese käigu teeb Kati. Kummal mängijatest on võimalus kindlustada endale võit ja kuidas peaks ta sel juhul mängima?

*Märkus. Arvu jagajateks on alati ka arv 1 ja arv ise.*